Челябинский государственный университет

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Методические указания

Челябинск
2000

Министерство образования
Российской Федерации

Челябинский государственный университет

Интегрирование функций одной переменной

Методические указания

Челябинск 2000

Одобрено учебно-методическим советом математического факультета Челябинского государственного университета.

Методические указания содержат изложение методов нахождения неопределенных интегралов от различных функций, вычисления определенных интегралов, собственных и несобственных, а также методы исследования сходимости несобственных интегралов.

Предназначены для студентов первого курса специальности "Прикладная математика".

Составитель: канд. физ.-мат. наук, доц. В.Е.Федоров

Рецензент: канд. физ.-мат. наук, доц. А.С.Макаров

Содержание

1 Таблица простейших интегралов

Определение 1. Функция F называется *первообразной* для функции f на множестве X, если для всех $x \in X$ $F'(x) = f(x)$. В дальнейшем множество X указывать не будем. Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ называется *неопределенным интегралом* этой функции и обозначается $\int f(x)dx$. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C – произвольная константа.

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ

$$d\int f(x)dx = f(x)dx; \quad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$$

$$\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + C;$$

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx.$$

ТАБЛИЦА ПРОСТЕЙШИХ ИНТЕГРАЛОВ

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad \alpha \neq -1 \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1 \qquad \int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0 \qquad \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C, \quad a \neq 0 \qquad \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0 \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 dx} = -\operatorname{cth} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x+\sqrt{x^2+a}|+C, \quad a \neq 0 \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 dx} = \operatorname{th} x + C$$

Приведем некоторые примеры вычисления неопределенных интегралов.

$$\int \frac{(x^3+\sqrt{x})^2 dx}{\sqrt{x}} = \int \frac{x^6+2x^3\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}} dx =$$

$$\int x^{11/2}dx + 2\int x^3 dx + \int \sqrt{x}dx = \frac{2}{13}x^6\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^4 + \frac{2}{3}x^{3/2} + C.$$

$$\int 2^{2x}5^x dx = \int (2^2\cdot 5)^x dx = \int 20^x dx = \frac{20^x}{\ln 20} + C.$$

УПРАЖНЕНИЕ. Применяя таблицу простейших интегралов решить задания № 1628 - 1673. (Здесь и в дальнейшем задания даются из [1].)

2 Замена переменной

Используя формулу для дифференциала функции

$$d\varphi(x) = \varphi'(x)dx,$$

с помощью замены $\varphi(x) = u$ часто удается упростить подынтегральное выражение вида

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C = F(\varphi(x)) + C,$$

где $F(u)$ – первообразная для функции $f(u)$.

Приведем некоторые формулы для преобразования дифференциалов:

$$dx = \frac{1}{a}d(ax+b), \qquad \frac{dx}{x} = d\ln x,$$

$$x^\alpha dx = \frac{dx^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \qquad a^x dx = \frac{da^x}{\ln a},$$

$$\cos x dx = d\sin x, \qquad \sin x dx = -d\cos x.$$

Рассмотрим несколько примеров.

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} = \int \frac{d\operatorname{arctg} x}{\operatorname{arctg} x} = \Big| u = \operatorname{arctg} x \Big| =$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\operatorname{arctg} x| + C.$$

$$\int \frac{xdx}{4+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{4+x^4} = \left| u = x^2 \right| = \frac{1}{2}\int \frac{du}{2^2+u^2} =$$

$$\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{u}{2} + C = \frac{1}{4}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{2} + C.$$

Иногда при интегрировании функции, содержащей в знаменателе неразложимые квадратные трехчлены (с отрицательным дискриминантом), надо выделить в трехчлене полный квадрат. Общее правило выделения полного квадрата в неразложимом трехчлене:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4c - b^2}{4a}.$$

Рассмотрим простейшие примеры.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1/2)^2+3/4}} = \int \frac{d(x+1/2)}{\sqrt{(x+1/2)^2+3/4}} =$$

$$\ln|x+1/2+\sqrt{(x+1/2)^2+3/4}|+C = \ln|x+1/2+\sqrt{x^2+x+1}|+C.$$

$$\int \frac{dx}{2x^2+x+1} = \int \frac{dx}{2(x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1/4)^2+7/16} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{7}\int \frac{dx}{\left(\frac{4x}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{7}}\int \frac{d\left(\frac{4x}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)}{\left(\frac{4x}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\left(\frac{4x+1}{\sqrt{7}}\right) + C.$$

Иногда удобнее проводить замену переменных в обратном порядке. Пусть $x(t)$ и $t(x)$ взаимнообратные и непрерывно дифференцируемые функции. Если $\Phi(t)$ – первообразная для функции $f(x(t))x'(t)$, то

$$\int f(x)dx = \int f(x(t))x'(t)dt = \Phi(t) + C = \Phi(t(x)) + C.$$

Функция $x(t)$ подбирается так, чтобы упростить подынтегральное выражение.

$$\int (x+3)^2\sqrt{x-1}dx = \left| x-1=t, \quad dx=dt \right| = \int (t+4)^2\sqrt{t}dt =$$

$$= \int t^{5/2}dt + 8\int t^{3/2}dt + 16\int t^{1/2}dt = \frac{2}{7}t^{7/2} + \frac{16}{5}t^{5/2} + \frac{32}{3}t^{3/2} + C =$$

$$= \frac{2}{7}(x-1)^3\sqrt{x-1} + 3\frac{1}{5}(x-1)^2\sqrt{x-1} + 10\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} + C.$$

Если дробных степеней от выражений вида $\frac{ax+b}{cx+d}$ несколько, то делаем замену

$$\frac{ax+b}{cx+d} = z^p,$$

где p – наибольший общий знаменатель всех показателей степеней.

$$\int \frac{\sqrt{\frac{x}{1+x}}dx}{(1+x)^2\left(1+\sqrt[3]{\frac{x}{1+x}}\right)} = \left| \frac{x}{1+x} = z^6, \quad dx = \frac{6z^5dz}{(1-z^6)^2} \right| = \int \frac{z^3\cdot 6z^5dz}{1+z^2} =$$

$$= 6\int \left(z^6 - z^4 + z^2 - 1 + \frac{1}{1+z^2} \right) dz =$$

$$= \frac{6}{7}z^7 - \frac{6}{5}z^5 + 2z^3 - 6z + 6\operatorname{arctg} z + C =$$

$$= \frac{6}{7}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{7/6} - \frac{6}{5}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{5/6} + \sqrt{\frac{x}{1+x}} - 6\sqrt[6]{\frac{x}{1+x}} + 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{\frac{x}{1+x}} + C.$$

При этом мы разделили z^8 на $1+z^2$.

Вычислим еще несколько интегралов.

$$\int \frac{dx}{1+e^x} = \left| e^x = y, \quad x = \ln y, \quad dx = \frac{dy}{y} \right| = \int \frac{dy}{y(1+y)} =$$

$$\int \frac{dy}{y} - \int \frac{dy}{y+1} = \ln\left|\frac{y}{1+y}\right| + C = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x dx}{1-\cos^2 x} = -\int \frac{d\cos x}{1-\cos^2 x} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + C.$$

УПРАЖНЕНИЕ. Используя методы, изложенные в данном параграфе, вычислить интегралы № 1674 - 1740, 1836 -1843.

3 Интегрирование по частям

Если $u(x)$, $v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции, то справедлива формула интегрирования по частям

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x)du(x) \quad \text{или}$$

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx.$$

Приведем наиболее типичные примеры.

$$\int \ln x dx = \Big| u = \ln x, v = x \Big| = x\ln x - \int x d\ln x = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx =$$

$$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

$$\int x\cos 2x dx = \frac{1}{2}\int x d\sin 2x = \Big| u = x, v = \sin 2x \Big| =$$

$$\frac{1}{2}x\sin 2x - \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

$$\int x^2 e^{3x}dx = \frac{1}{3}\int x^2 de^{3x} = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{1}{3}\int e^{3x}2x dx =$$

$$= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}\int x de^{3x} = \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{9}\int e^{3x}dx =$$

$$= \frac{1}{3}x^2e^{3x} - \frac{2}{9}xe^{3x} + \frac{2}{27}e^{3x} + C.$$

Такие интегралы аналогичным образом вычисляются и в случае, когда в первом интеграле вместо множителя x или во втором интеграле вместо множителя x^2 стоит некоторый многочлен степени n. При этом надо интегрировать последовательно по частям n раз.

Интегралы следующих типов выражаются сами через себя.

$$I = \int e^{2x}\sin 3x dx = \frac{1}{2}\int \sin 3x de^{2x} = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{1}{2}\int e^{2x}d\sin 3x =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}\int \cos 3x de^{2x} =$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{4}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}\int e^{2x} d\cos 3x =$$
$$= \frac{1}{4}e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos 3x) - \frac{9}{4}\int e^{2x}\sin 3x dx =$$
$$= \frac{1}{4}e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos 3x) - \frac{9}{4}I$$

Отсюда

$$\frac{13}{4}I = \frac{1}{4}e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos 3x), \quad I = \frac{1}{13}e^{2x}(2\sin 3x - 3\cos 3x).$$

$$J = \int \sqrt{a^2 - x^2}dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int xd\sqrt{a^2 - x^2} =$$
$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int x\frac{-2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}}dx = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$
$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{a^2 - x^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx =$$
$$= x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}dx + a^2\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$
$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a} - J + C_1.$$

Поэтому

$$J = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C, \quad a > 0.$$

УПРАЖНЕНИЕ. Применяя метод интегрирования по частям, вычислить интегралы № 1791 - 1831.

4 Интегрирование рациональных функций

Рациональной называется функция вида $\frac{R_l(x)}{Q_n(x)}$, где $R_l(x)$, $Q_n(x)$ – многочлены степени l и n соответственно.

Если $l \geq n$, то можно выделить целую часть дроби

$$\frac{R_l(x)}{Q_n(x)} = S_{l-n}(x) + \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

где $S_{l-n}(x)$, $P_m(x)$ – многочлены степени $l-n$ и m соответственно, $m < n$. Поэтому интегрирование рациональных функций сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}, \quad m < n.$$

При этом можно считать коэффициент при x^n равным единице.

Первым шагом при вычислении интеграла от функции такого вида является разложение знаменателя на множители

$$Q_n(x) = (x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_i)^{k_i}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \dots (x^2+p_jx+q_j)^{l_j},$$

где $a_1, a_2, \dots, a_i$ – корни многочлена $Q_n(x)$ кратности $k_1, k_2, \dots, k_i$ соответственно, а трехчлены $x^2+p_lx+q_l$, $l = 1, \dots, j$, не имеют действительных корней $(p_l^2 - 4q_l < 0)$. При этом $\sum\limits_{r=1}^{i} k_r + 2\sum\limits_{r=1}^{j} l_j = n$.

Следующим шагом является представление дроби в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1^{(1)}}{x-a_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{x-a_2} + \dots + \frac{A_{k_2}^{(2)}}{(x-a_2)^{k_2}} +$$

$$+ \frac{A_1^{(i)}}{x-a_i} + \dots + \frac{A_{k_i}^{(i)}}{(x-a_i)^{k_i}} + \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_2^{(1)}x + C_2^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots +$$

$$+ \frac{B_{l_1}^{(1)}x + C_{l_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \dots + \frac{B_1^{(j)}x + C_1^{(j)}}{x^2+p_jx+q_j} + \dots + \frac{B_{l_j}^{(j)}x + C_{l_j}^{(j)}}{(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}}.$$

Здесь $A_1^{(1)}, \dots A_{k_i}^{(i)}$, $B_1^{(1)}, \dots B_{l_j}^{(j)}$, $C_1^{(1)}, \dots C_{l_j}^{(j)}$ – некоторые числа, которые находятся *методом неопределенных коэффициентов*. Заключается он в том, что правая часть последнего равенства приводится к общему знаменателю. В числителе получившегося выражения получается некоторый многочлен степени m, коэффициенты которого, выраженные через искомые константы, надо приравнять к коэффициентам многочлена $P_m(x)$. Получится система $m+1$ линейного уравнения. Рассмотрим пример

$$I = \int \frac{4x^2+3}{(2x^2-8)(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{4x^2+3}{(x-2)(x+2)(x^2+1)^2}.$$

$$\frac{4x^2+3}{(x-2)(x+2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}=$$
$$\frac{A(x+2)(x^2+1)^2+B(x-2)(x^2+1)^2}{(x^2-4)(x^2+1)^2}+$$
$$\frac{(Cx+D)(x^2-4)(x^2+1)+(Ex+F)(x^2-4)}{(x^2-4)(x^2+1)^2}.$$

$4x^2+3=(A+B+C)x^5+(2A-2B+D)x^4+(2A+2B-3C+E)x^3+$
$+(4A-4B-3D+F)x^2+(A+B-4C-4E)x+(2A-2B-4D-4F).$

Отсюда

$$A+B+C=0,\quad 2A-2B+D=0,$$
$$2A+2B-3C+E=0,\quad 4A-4B-3D+F=4,$$
$$A+B-4C-4E=0,\quad 2A-2B-4D-4F=3.$$

Решая эту систему, получим значения $A=0,19$, $B=-0,19$, $C=E=0$, $D=-0,76$, $F=0,2$. Поэтому

$$I=0,095\int\frac{dx}{x-2}-0,095\int\frac{dx}{x+2}-0,38\int\frac{dx}{x^2+1}+0,1\int\frac{dx}{(x^2+1)^2} \qquad (4.1).$$

Есть другие методы нахождения коэффициентов разложения, которые не столь универсальны, как изложенный выше, но в частных случаях бывают гораздо удобнее. Например, если знаменатель имеет только действительные простые (кратности один) корни, можно поступить следующим образом.

$$\frac{2x^2+4x-5}{(x^2-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x+2}.$$

$2x^2+4x-5=A(x+1)(x+2)+B(x-1)(x+2)+C(x-1)(x+1).$

Положим поочередно $x=1$, $x=-1$, $x=-2$. Получим равенства

$$1=6A,\quad -7=-2B,\quad -5=3C.$$

Отсюда $A=1/6$, $B=7/2$, $C=-5/3$.

$$\int\frac{2x^2+4x-5}{(x^2-1)(x+2)}=\frac{1}{6}\ln|x-1|+3\frac{1}{2}\ln|x+1|-1\frac{2}{3}\ln|x+2|+C.$$

Если знаменатель имеет действительные корни, среди которых есть корни кратности больше единицы, то поступим так:

$$\frac{-x^2+3x+7}{(x+3)(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x+3}.$$

$$-x^2+3x+7 = A(x+1)(x+3) + B(x+3) + C(x+1)^2. \qquad (4.2)$$

Положим $x=-1$, тогда $3=2B$, $B=3/2$. Теперь положим $x=-3$, получим $-11=4$, $C=-11/4$. Осталось найти A. Продифференцируем тождество (4.2):

$$-2x+3 = A(2x+4) + B + 2C(x+1).$$

Положим x равным значению кратного корня, то есть $x=-1$, тогда $5=2A+B=2A+3/2$, $A=7/4$.

$$\int \frac{-x^2+3x+7}{(x+3)(x+1)^2} = \frac{7}{4}\int\frac{dx}{x+1} + \frac{3}{2}\int\frac{d(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{11}{4}\int\frac{dx}{x+3} =$$

$$= 1,75\ln|x+1| - \frac{1,5}{x+1} - 2,75\ln|x+3| + C.$$

Итак, разбивая правильную дробь на простейшие, мы ее интегрирование сводим к интегрированию дробей следующих видов:

$$1)\frac{A}{x-a}; \qquad 2)\frac{B}{(x-a)^k}; \qquad 3)\frac{Cx+D}{x^2+px+q}; \qquad 4)\frac{Cx+D}{(x^2+px+d)^l}.$$

Посчитаем интегралы от этих дробей:

$$1) \quad \int\frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C.$$

$$2) \quad \int\frac{B}{(x-a)^k} = \frac{B}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C.$$

$$3) \quad \int\frac{Cx+D}{x^2+px+q}dx = \int\frac{Cx+D}{(x+p/2)^2+\frac{4q-p^2}{4}}dx =$$

$$= \left| x+p/2=u, \quad \frac{4q-p^2}{4}=b, \quad D-C\frac{p}{2}=E \right| = \int\frac{Cu+E}{u^2+b}du =$$

$$= C\int\frac{udu}{u^2+b} + E\int\frac{du}{u^2+b} = \frac{C}{2}\int\frac{d(u^2+b)}{u^2+b} + E\int\frac{du}{u^2+b} =$$

$$= \frac{C}{2}\ln(u^2+b) + \frac{E}{\sqrt{b}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{b}} + C_1 =$$

Здесь надо заметить, что $b = -\mathcal{D}/4 > 0$, так как $\mathcal{D}$ – дискриминант квадратного трехчлена x^2+px+q, не имеющего действительных корней, а значит, отрицательный.

$$= \frac{C}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{2D-Cp}{\sqrt{4q-p^2}}\operatorname{arctg}\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C_1.$$

$$4) \qquad \int \frac{Cx+D}{(x^2+px+q)^l}dx = \int \frac{\frac{C}{2}(2x+p) + \left(D - \frac{Cp}{2}\right)}{(x^2+px+q)^l}dx =$$

$$= \frac{C}{2}\int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^l}dx + \left(D - \frac{Cp}{2}\right)\int \frac{d(x+p/2)}{\left((x+p/2)^2 + \frac{4q-p^2}{4}\right)^l} =$$

$$= \left| x+p/2 = u, \quad \frac{4q-p^2}{4} = b \right| =$$

$$= \frac{C}{2(1-l)}(x^2+px+q)^{1-l} + \left(D - \frac{Cp}{2}\right)\int \frac{du}{(u^2+b)^l}.$$

В последнем интеграле делается подстановка $u = \sqrt{b}\operatorname{tg} z$:

$$\int \frac{du}{(u^2+b)^l} = b^{\frac{1}{2}-l}\int \cos^{2(l-1)} dz.$$

Вычисление интегралов такого вида мы еще рассмотрим в п. 6.

Еще один способ вычисления интеграла $I_l = \int \frac{du}{(u^2+b)^l}$ – использовать рекуррентное соотношение, которое мы сейчас установим.

$$I_l = \int \frac{du}{(u^2+b)^l} = \frac{1}{b}\int \frac{u^2+b-u^2}{(u^2+b)^l}du =$$

$$= \frac{1}{b}\int \frac{du}{(u^2+b)^{l-1}} - \frac{1}{2}\int \frac{u}{(u^2+b)^l}d(u^2+b) =$$

$$\frac{1}{b}I_{l-1} - \frac{1}{2}\int ud\left(\frac{(u^2+b)^{1-l}}{1-l}\right) =$$

$$\frac{1}{b}I_{l-1} + \frac{1}{2(l-1)}u(u^2+b)^{1-l} - \frac{1}{2(l-1)}\int \frac{du}{(u^2+b)^{l-1}} =$$

$$= \frac{2l-b-2}{2b(l-1)} I_{l-1} - \frac{u}{2(l-1)(u^2+b)^{l-1}} = I_l.$$

Например, посчитаем интеграл

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} I_1 - \frac{x}{2(x^2+1)} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2(x^2+1)} + C.$$

Досчитаем интеграл (4.1)

$$I = 0,095 \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| - 0,33 \operatorname{arctg} x - 0,05 \frac{x}{x^2+1} + C.$$

УПРАЖНЕНИЕ. Решить задания № 1866 -1889.

5 Метод Остроградского

Пусть знаменатель несократимой правильной дроби $P_m(x)/Q_n(x)$ имеет вид

$$Q_n(x) = (x-a_1)^{k_1} \dots (x-a_i)^{k_i} (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \dots (x^2+p_jx+q_j)^{l_j}.$$

Метод Остроградского заключается в использовании формулы

$$\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx = \frac{R(x)}{S(x)} + \int \frac{T(x)}{U(x)} dx.$$

В ней многочлены $S(x)$ и $U(x)$ имеют вид

$$S(x) = (x-a_1)^{k_1-1} \dots (x-a_i)^{k_i-1} (x^2+p_1x+q_1)^{l_1-1} \dots (x^2+p_jx+q_j)^{l_j-1},$$

$$U(x) = (x-a_1) \dots (x-a_i)(x^2+p_1x+q_1) \dots (x^2+p_jx+q_j)$$

соответственно и могут быть вычислены без разложения многочлена $Q_n(x)$ на произведение неприводимых множителей.

Действительно, $S(x)$ является наибольшим общим делителем двух многочленов $Q_n(x)$ и $Q'_n(x)$ и может быть вычислен при помощи алгоритма Евклида, который излагается в курсе алгебры.

Многочлен $U(x)$ представляет собой частное $Q_n(x)/S(x)$ и может быть вычислен посредством деления $Q_n(x)$ на $S(x)$ столбиком.

Остается вычислить многочлены $R(x)$ и $T(x)$ как многочлены с неопределенными коэффициентами степени на единицу ниже, чем

$S(x)$ и $U(x)$ соответственно. Для вычисления указанных неопределенных коэффициентов следует продифференцировать формулу Остроградского, привести результат дифференцирования к общему знаменателю и сопоставить коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях.

Метод Остроградского особенно эффективен, когда корни $Q_n(x)$ в основном являются кратными или когда вызывает затруднение нахождение корней $Q_n(x)$.

Вычислим
$$\int \frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}dx.$$

Имеем
$$Q_n(x) = x^4-2x^3+3x^2-2x+1,$$
$$Q_n'(x) = 4x^3-6x^2+6x-2.$$

Наибольший общий делитель этих многочленов равен
$$S(x) = x^2-x+1.$$

Поделив $Q_n(x)$ на $S(x)$ "столбиком", найдем
$$U(x) = x^2-x+1.$$

$R(x)$ и $T(x)$ задаем как многочлены первой степени с неопределенными коэффициентами, и формула Остроградского принимает вид
$$\int \frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}dx = \frac{Ax+B}{x^2-x+1} + \int \frac{Cx+D}{x^2-x+1}dx.$$

Продифференцируем эту формулу:
$$\frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1} =$$
$$= \frac{A(x^2-x+1)-(Ax+B)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}.$$

Результат дифференцирования приводим к общему знаменателю, после чего сопоставляем числители. Получим
$$6-7x-x^2 = A(x^2-x+1)-(Ax+B)(2x-1)+(Cx+D)(x^2-x+1).$$

Сравнивая коэффициенты при x^0, x^1, x^2 и x^3, получим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} C=0, \\ -A+D-C=-1, \\ -2B-D+C=-7, \\ A+B+D=6. \end{array}\right\}$$

Решая эту систему, найдем $A=2$, $B=3$, $C=0$, $D=1$. Таким образом формула Остроградского принимает вид

$$\int \frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}dx = \frac{2x+3}{x^2-x+1} + \int \frac{dx}{x^2-x+1}.$$

Вычислим интеграл в правой части:

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \int \frac{dx}{(x-1/2)^2+3/4} = \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Окончательно имеем

$$\int \frac{6-7x-x^2}{x^4-2x^3+3x^2-2x+1}dx = \frac{2x+3}{x^2-x+1} + \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

Рассмотрим еще один пример.

$$I = \int \frac{x^2+1}{x^4+1}dx.$$

Разложим знаменатель на множители:

$$x^4+1 = (x^2+ax+1)(x^2+cx+1) = x^4+(a+c)x^3+(2+ac)x^2+(a+c)x+1.$$

Отсюда $a+c=0, \quad 2+ac=0, \quad a=\sqrt{2}, c=-\sqrt{2}$.

$$\frac{x^2+1}{(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

Приравниваем коэффициенты:

$$A+C=0, \quad \sqrt{2}(C-A)+B+D=1, \quad A+C+\sqrt{2}(D-B)=0,$$

$$B+D=1; \qquad A=C=0, \quad B=D=\frac{1}{2}.$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-\sqrt{2}x+1} =$$

$$\int \frac{dx}{(\sqrt{2}x+1)^2+1} + \int \frac{dx}{(\sqrt{2}x-1)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}x+1) + \operatorname{arctg}(\sqrt{2}x-1)) + C.$$

УПРАЖНЕНИЕ. Применяя метод Остроградского, найти интегралы № 1891 - 1897.

6 Тригонометрические функции

При интегрировании тригонометрических функций часто оказываются полезными следующие формулы:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\sin\alpha \sin\beta = 1/2(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha \cos\beta = 1/2(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha \cos\beta = 1/2(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$

Например,

$$\int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)dx = \frac{1}{2}\int \sin((\alpha+\beta)x)dx + \frac{1}{2}\int \sin((\alpha-\beta)x)dx =$$

$$\frac{1}{2(\alpha+\beta)}\int \sin((\alpha+\beta)x)d((\alpha+\beta)x) +$$

$$+\frac{1}{2(\alpha-\beta)}\int \sin((\alpha-\beta)x)d((\alpha-\beta)x) =$$

$$= -\frac{1}{2(\alpha+\beta)}\cos((\alpha+\beta)x) - \frac{1}{2(\alpha-\beta)}\cos((\alpha-\beta)x) + C.$$

Иногда удобно использовать формулу $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$ следующим образом:

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos x}dx = \int \frac{dx}{\cos x} + \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} =$$

$$= \left| t = \sin x \right| = \int \frac{dt}{1-t^2} + \int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - \frac{1}{t} + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) - \frac{1}{\sin x} + C.$$

Рассмотрим интеграл вида

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \tag{6.1}$$

с рациональной функцией R.

При любой функции R такой интеграл сводится к интегралу от рациональной функции (см. пп. 4,5) с помощью *универсальной тригонометрической подстановки*:

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\int \frac{dx}{3+2\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3+\frac{4t}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{3t^2+4t+3} =$$

$$\frac{2}{3}\int \frac{dt}{(t+2/3)^2+5/9} = \frac{6}{5}\int \frac{dt}{\left(\frac{3t+2}{\sqrt{5}}\right)^2+1} = \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3t+2}{\sqrt{5}} + C =$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}{\sqrt{5}} + C.$$

В некоторых случаях процедуру сведения интеграла (6.1) к интегралу от рациональной функции можно упростить. Рассмотрим эти случаи.

1). Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то удобнее воспользоваться подстановкой

$$t = \cos x, \quad dx = \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

2). При условии $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, проще всего использовать замену

$$t = \sin x, \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

3). В случае $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, поможет подстановка

$$t = \operatorname{tg} x, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^4 x} dx = \Bigg| \operatorname{tg} x = t, \quad \sin 2x = 2\sin x \cos x = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\sin x = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}} \operatorname{tg} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \Bigg| =$$

$$\int \frac{\frac{2t}{1+t^2}\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}\frac{1}{(1+t^2)^2}} = 2\int \frac{1+t^2}{t} dt.$$

$$2\int \frac{dt}{t} + 2\int t dt = 2\ln|t| + t^2 + C = 2\ln|\operatorname{tg} x| + \operatorname{tg}^2 x + C.$$

Интеграл вида

$$\int R(\mathrm{sh} x, \mathrm{ch} x) dx$$

можно рационализировать посредством подстановки $t = \mathrm{th}\frac{x}{2}$, при этом

$$\mathrm{sh} x = \frac{2t}{1-t^2}, \quad \mathrm{ch} x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1-t^2}.$$

УПРАЖНЕНИЕ. Посчитать интегралы № 1741 - 1765.

7 Интегрирование иррациональных функций

Если подынтегральная функция содержит радикалы вида $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$, $\sqrt{a^2-x^2}$, то часто бывает полезно сделать одну из следующих замен:

$$\sqrt{a^2-x^2} = \Bigg| x = a\sin t, \quad dx = a\cos t dt \Bigg| = a\cos t,$$

$$\sqrt{a^2-x^2} = \Bigg| x = a\cos t, \quad dx = -a\sin t dt \Bigg| = a\sin t;$$

$$\sqrt{x^2-a^2} = \Bigg| x = \frac{a}{\cos t}, \quad dx = a\frac{\sin t}{\cos^2 t} dt \Bigg| = a\operatorname{tg} t$$

или

$$\sqrt{x^2-a^2}=\left|x=a\operatorname{ch}t,\quad dx=a\operatorname{sh}t dt\right|=a\operatorname{sh}t;$$

$$\sqrt{x^2+a^2}=\left|x=a\operatorname{tg}t,\quad dx=\frac{a}{\cos^2 t}dt\right|=\frac{a}{\cos t},$$

$$\sqrt{x^2+a^2}=\left|x=a\operatorname{sh}t,\quad dx=a\operatorname{ch}t dt\right|=a\operatorname{ch}t.$$

В следующем интеграле воспользуемся последней из замен.

$$\int\frac{2}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx=\int\frac{2}{\operatorname{sh}^2 t\operatorname{ch}t}\operatorname{ch}t dt=2\int\frac{dt}{\operatorname{sh}^2 t}=-2\operatorname{cth}t+C=$$
$$=-2\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}+C.$$

Иногда могут помочь тригонометрические или гиперболические подстановки другого вида:

$$\int\sqrt{(x-a)(b-x)}dx=\left|x-a=(b-a)\sin^2 t,\quad dx=2(b-a)\sin t\cos t dt\right|$$
$$=\int\sqrt{(b-a)^2\sin^2 t\cos^2 t}2(b-a)\sin t\cos t dt=\frac{1}{2}\int(b-a)^2\sin^2 2t dt=$$
$$=\frac{(b-a)^2}{4}\int(1-\cos 4t)dt=\frac{(b-a)^2}{16}(4t-\sin 4t)dt=$$
$$=\frac{(b-a)^2}{16}\left(4\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}-4\frac{\sqrt{(x-a)(b-x)}(b+a-2x)}{(b-a)^2}\right)+C=$$
$$=\frac{(b-a)^2}{4}\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}-\frac{1}{4}(b+a-2x)\sqrt{(x-a)(b-x)}+C.$$

УПРАЖНЕНИЕ 1. Найти интегралы № 1778 - 1781, 1786 - 1789, 1991 - 2040.

Рассмотрим интеграл вида

$$\int\frac{R_l(x)}{Q_n(x)\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \qquad (7.1).$$

Выделим из рациональной функции целую часть

$$\frac{R_l(x)}{Q_n(x)}=S_{l-n}(x)+\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$$

и разложим правильную дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ на сумму простейших дробей. После этого задача о нахождении интеграла (7.1) сведется к нахождению интегралов

$$1) \int \frac{P_n(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{7.2}$$

$$2) \int \frac{dx}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{7.3}$$

$$3) \int \frac{(Ax+B)dx}{(x^2+px+q)^l\sqrt{ax^2+bx+c}}. \tag{7.4}$$

Интеграл (7.2) считается с помощью формулы

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Чтобы найти коэффициенты многочлена Q_{n-1} степени $n-1$ и число λ, надо продифференцировать эту формулу.

$$I = \int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}}dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2+4x+3}+$$

$$+\lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+3}}.$$

После дифференцирования получим

$$\frac{x^3-6x^2+11x-6}{\sqrt{x^2+4x+3}} =$$

$$= \frac{(2Ax+B)(x^2+4x+3)+(Ax^2+Bx+C)(x+2)+\lambda}{\sqrt{x^2+4x+3}}.$$

Приравниваем коэффициенты

$$3A=1, \quad ,10A+2B=-6, \quad 6A+6B+C=11, \quad 3B+2C+\lambda=-6.$$

Отсюда

$$A=\frac{1}{3}, \quad B=-\frac{14}{3}, \quad C=37, \quad \lambda=-66.$$

$$I = \left(\frac{1}{3}x^2 - 4\frac{2}{3}x + 37\right)\sqrt{x^2+4x+3} - 66\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-1}} =$$

$$= \left(\frac{1}{3}x^2 - 4\frac{2}{3}x + 37\right)\sqrt{x^2+4x+3} - 66\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+3}\right| + C.$$

Посчитаем теперь интеграл (7.3) с помощью замены $x - \alpha = t^{-1}$. Получим

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^l\sqrt{ax^2+bx+c}} =$$

$$= \int \frac{dx}{(x-\alpha)^l\sqrt{a(x-\alpha)^2+(b+2a\alpha)(x-\alpha)+c+a\alpha^2+b\alpha}} =$$

$$= \int \frac{dx}{(x-\alpha)^l\sqrt{a(x-\alpha)^2+b_1(x-\alpha)+c_1}} =$$

$$= \int \frac{dx}{(x-\alpha)^{l+1}\sqrt{a+\frac{b_1}{x-\alpha}+\frac{c_1}{(x-\alpha)^2}}} =$$

$$= \left| x-\alpha = t^{-1}, \quad dx = -\frac{dt}{t^2} \right| = -\int \frac{t^{l-1}dt}{\sqrt{a+b_1t+c_1t^2}}.$$

Таким образом, интеграл сведен к предыдущему (7.2).

Осталось рассмотреть интеграл (7.4). В случае $p = b/a$ делаем замену $x = t - p/2$. Когда $p \neq b/a$, нужна замена $x = \frac{\alpha t+\beta}{t+1}$, при этом α и β подбираются такими, чтобы в трехчленах не осталось членов с первой степенью. Для этого надо решить относительно α и β уравнения

$$2\alpha\beta + p(\alpha+\beta) + 2q = 0, \quad 2a\alpha\beta + b(\alpha+\beta) + 2c = 0. \tag{7.5}$$

После замены получим интегралы

$$A\int \frac{tdt}{(t^2+\gamma)^l\sqrt{\delta t^2+\varepsilon}} + B\int \frac{dt}{(t^2+\gamma)^l\sqrt{\delta t^2+\varepsilon}}.$$

В первом из них применяем подстановку $u = \sqrt{\delta t^2+\varepsilon}$, во втором – подстановку $v = (\sqrt{\delta t^2+\varepsilon})'$.

Рассмотрим соответствующие примеры. Первый случай ($p = b/a$):

$$I = \int \frac{(x+1)dx}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}} = \left| x = t+1 \right| = \int \frac{(t+2)dt}{(t^2+3)\sqrt{3-t^2}} =$$

$$= \left| \sqrt{3-t^2} = u, \quad tdt = -udu, \quad (\sqrt{3-t^2})' = v, \quad t = \frac{\sqrt{3}v}{\sqrt{1+v^2}} \right| =$$

$$= -\int \frac{udu}{u(6-u^2)} + 2\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{(1+v^2)^{3/2}}dv}{\frac{3+6v^2}{1+v^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+v^2}}} = -\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+u}{\sqrt{6}-u}\right| + \frac{2}{3}\int\frac{dv}{1+2v^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}\right| + \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}(\sqrt{2}v) + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}\right| + \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}x}{\sqrt{2+2x-x^2}}\right) + C.$$

Случай второй ($p \neq b/a$):

$$I = \int \frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

Решаем систему (7.5)

$$2\alpha\beta - \alpha - \beta + 2 = 0, \quad 2\alpha\beta + \alpha + \beta + 2 = 0.$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = -1.$$

Делаем замену

$$x = \frac{t-1}{t+1}, \quad dx = \frac{2dt}{(t+1)^2}.$$

$$I = \int \frac{2(t+1)dt}{(t^2+3)\sqrt{3t^2+1}}.$$

Дальше интеграл считается совершенно аналогично предыдущему.

Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx, \quad a \neq 0, \quad b^2 - 4ac \neq 0,$$

где $R(\cdot,\cdot)$ – рациональная функция, можно свести к интегралам от рациональных функций посредством одной из *подстановок Эйлера*:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t \pm \sqrt{a}x, \quad a > 0,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm tx \pm \sqrt{c}, \quad c > 0,$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm t(x - x_1), \quad b^2 - 4ac > 0,$$

где x_1 – один из корней квадратного трехчлена ax^2+bx+c.

$$I=\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\left|\sqrt{x^2+x+1}=tx+1,\quad x=\frac{2t-1}{1-t^2},\right.$$

$$\left.dx=\frac{2-2t+2t^2}{(1-t^2)^2}dt\right|=\int\frac{\frac{2-2t+2t^2}{(1-t^2)^2}dt}{\frac{2t-1}{1-t^2}+\frac{2t^2-t}{1-t^2}+1}=$$

$$=\int\frac{2-2t+2t^2}{(1-t^2)(t^2+t)}dt.$$

$$\frac{2-2t+2t^2}{(1-t^2)(t^2+t)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{1-t}+\frac{C}{1+t}+\frac{D}{(1+t)^2}.$$

$$2-2t+2t^2=A(1-t^2)(1+t)+Bt(1+t)^2+Ct(1-t^2)+Dt(1-t).$$

$$-A+B-C=0,\quad -A+2B-D=2,\quad A+B+C+D=-2,\quad A=2.$$

$$B=1/2,\quad C=-3/2,\quad D=-3.$$

$$I=2\int\frac{dt}{t}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1-t}-\frac{3}{2}\int\frac{dt}{1+t}-3\int\frac{dt}{(1+t)^2}=$$

$$=2\ln|t|-\frac{1}{2}\ln|1-t|-\frac{3}{2}\ln|1+t|+\frac{3}{1+t}+C=$$

$$=2\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x}\right|-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1-\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|-$$

$$-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{x-1+\sqrt{x^2+x+1}}{x}\right|+\frac{3x}{x-1+\sqrt{x^2+x+1}}+C.$$

УПРАЖНЕНИЕ 2. С помощью подстановок Эйлера посчитать интегралы № 1967 - 1970.

Интеграл вида

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx, \tag{7.6}$$

где $a,b\in\mathbb{R}$, $m,n,p\in\mathbb{Q}$, причем $a,b,n,p\neq 0$, называют *интегралом от дифференциального бинома.* Интеграл (7.6) сводится к интегралу от рациональной функции в следующих трех случаях:

$p\in\mathbb{Z}$ – подстановкой $x=t^q$, где q – общий знаменатель m,n;

$\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$ – подстановкой $ax^n+b=t^q$, где q – знаменатель p;

$p+\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$ – подстановкой $a+bx^{-n}=t^q$, где q – знаменатель p.

Рассмотрим пример.

$$I = \int \sqrt[3]{3x - x^3}dx.$$

Здесь

$$m = p = 1/3, \quad n = 2, \quad a = -1, \quad b = 3, \quad p + \frac{m+1}{n} = 1.$$

Делаем замену

$$3 - \frac{1}{x^2} = t^3, \quad dx = \frac{3t^2dt}{2(3-t^3)^{3/2}}, \quad \sqrt[3]{3x - x^3} = \frac{\sqrt[3]{8-3t^3}}{\sqrt{3-t^3}}.$$

Тогда

$$I = \int \frac{\sqrt[3]{8-3t^3}}{\sqrt{3-t^3}} \cdot \frac{3t^2dt}{2(3-t^3)^{3/2}} = \left| t^3 = u \right| = \int \frac{\sqrt[3]{8-3u}}{2(3-u)^2}du =$$

$$= \left| 8 - 3u = v^3, \quad du = -v^2dv \right| =$$

$$= -\frac{9}{2}\int \frac{v^3dv}{(v^3+1)^2} = -\frac{9}{2}\int \frac{v^3dv}{(v+1)^2(v^2-v+1)^2}.$$

Дальше интеграл считается так, как это делается в пп. 4,5.

УПРАЖНЕНИЕ 3. Посчитать интегралы № 1981 - 1988.

УПРАЖНЕНИЕ 4. Применяя различные методы, изложенные выше, найти интегралы № 1851 - 1865, 1926 - 1950, 1952 - 1965, 1971 - 1979, 2126 - 2171.

8 Определенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $x_i \le \xi_i \le x_{i+1}$, $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $i = \overline{0, n-1}$. *Интегралом Римана* от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется число

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\max\limits_{0 \le i \le n-1} |\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

При этом, если интеграл существует, то функция называется *интегрируемой* на $[a, b]$.

Если функция определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ – ее первообразная, то справедлива *формула Ньютона-Лейбница*:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-1/2}^{1/2} = \frac{\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывно дифференцируемы на $[a, b]$. Тогда *формула интегрирования по частям* для определенных интегралов приобретает вид

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x)g(x)dx.$$

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx^2 = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x\Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{x^2+1} =$$

$$\frac{3\operatorname{arctg}\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x - x)\Big|_0^{\sqrt{3}} =$$

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, функция $\varphi(t)$ непрерывно диференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$, где $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на $[\alpha, \beta]$. Тогда имеет место *формула замены переменной*:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

$$\int\limits_0^{0,75} \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \left| x+1 = t^{-1} \right| = -\int\limits_1^{4/7} \frac{dt}{\sqrt{1-2t+2t^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{4/7}^{1} \frac{dt}{\sqrt{(t-1/2)^2+1/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| t - \frac{1}{2} + \sqrt{t^2 - t + \frac{1}{2}} \right| \Bigg|_{4/7}^{1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\ln \frac{1+\sqrt{2}}{2} - \ln \frac{1+5\sqrt{2}}{14} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{7(1+\sqrt{2})}{1+5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{9+4\sqrt{2}}{7}.$$

$$\int\limits_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx = \left| \sqrt{e^x-1} = y, \quad x = \ln(1+y^2), \quad dx = \frac{2ydy}{1+y^2} \right| =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \frac{y^2dy}{1+y^2} = 2(y - \operatorname{arctg} y)\Big|_0^1 = 2 - \frac{\pi}{2}.$$

$$\int\limits_0^1 \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx = \left| \arcsin\sqrt{x} = y, \quad x = \sin^2 y \right| =$$

$$= \int\limits_0^{\pi/2} \frac{2y\sin y\cos y dy}{\sin y \cos y} = y^2\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4}.$$

УПРАЖНЕНИЕ. Посчитать интегралы № 2206 - 2213, 2239 - 2250, 2268 - 2280.

9 Признаки сравнения

Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$ при любом $b > a$. Следующий предел

$$\lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \tag{9.1}$$

называется *несобственным интегралом первого рода* от функции $f(x)$ на множестве $[a, +\infty)$.

Если функция не ограничена в окрестности точки b и интегрируема на любом отрезке $[a, b-\varepsilon]$, где $0 < \varepsilon < b-a$, то *несобственным интегралом второго рода* с особенностью в точке b от функции $f(x)$ на множестве $[a, b)$ называется предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{9.2}$$

В отличие от определенных выше, интеграл Римана в смысле предыдущего параграфа называется *собственным*.

Если конечные пределы (9.1) или (9.2) существуют, то соответствующий интеграл называется *сходящимся*, в противном случае – расходящимся.

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx$$

Посчитаем сначала первообразную.

$$\int \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{\ln x d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{2}\int \ln x d\left(\frac{1}{1+x^2}\right) =$$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2(1+x^2)} = -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\int \frac{dx^2}{x^2(1+x^2)} =$$

$$= -\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}.$$

Таким образом,

$$I = \left(-\frac{\ln x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{1+x^2}\right)\Bigg|_0^{+\infty} =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{\ln b}{2(1+b^2)} + \frac{1}{4}\ln\frac{b^2}{1+b^2}\right) -$$

$$- \lim_{a\to 0+}\left(-\frac{\ln a}{2(1+a^2)} + \frac{1}{4}\ln a^2 - \frac{1}{4}\ln(1+a^2)\right) =$$

$$= 0 - \lim_{a\to 0+}\frac{1}{2}\ln a\left(1 - \frac{1}{1+a^2}\right) = -\lim_{a\to 0+}\frac{a^2\ln a}{2(1+a^2)} = 0.$$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}} = \left|\sqrt{1-x} = y, \quad x = 1-y^2\right| = \int\limits_1^0 \frac{-2ydy}{(1+y^2)y} =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = 2\operatorname{arctg} y\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

Последний из посчитанных интегралов изначально был несобственным второго рода, но после замены получился собственный интеграл.

$$\int\limits_0^1 \ln x dx = (x\ln x - x)\Big|_0^1 = -1 - \lim_{a\to 0+}(a\ln a - a) = -1.$$

Интеграл (9.1) или (9.2) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится соответствующий интеграл от $|f(x)|$. Из абсолютной сходимости следует сходимость несобственного интеграла.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную особенность в точке b, $b \le +\infty$, и выполняются неравенства $0 \le f(x) \le g(x)$, $x \in (a,b)$. Тогда из сходимости несобственного интеграла $I_2 = \int_a^b g(x)dx$ следует сходимость $I_1 = \int_a^b f(x)dx$, а из расходимости I_1 – расходимость I_2. (Это утверждение называется *первым признаком сходимости* несобственных интегралов.) Если же для этих функций к тому же существует конечный предел

$$\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} > 0$$

(другими словами, функции $f(x)$ и $Ag(x)$ эквивалентны $f \sim Ag$), то интегралы I_1 и I_2 сходятся или расходятся одновременно. (*Второй признак сходимости* несобственных интегралов.)

Интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} \tag{9.3}$$

сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1$. Интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} \tag{9.4}$$

сходится при $\alpha < 1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1} = \int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{x^4 - x^2 + 1}.$$

Знаменатель подынтегральной функции вещественных корней не имеет, поэтому ее особенность – только $+\infty$, а первое из слагаемых в правой части равенства – собственный интеграл. На бесконечности $x^4 - x^2 + 1 \sim x^4$, поэтому рассмотрим

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$$

Он сходится, так как $2 > 1$ (см. (9.3)). Следовательно, и наш интеграл сходится.

$$I = \int\limits_0^2 \frac{dx}{\ln x} = -\int\limits_0^1 \frac{dx}{-\ln x} + \int\limits_1^2 \frac{dx}{\ln x}.$$

Признаки сравнения сформулированы для неотрицательных функций, поэтому мы разбили промежуток интегрирования на два промежутка, на которых подынтегральная функция сохраняет знак. Исследуем получившиеся два интеграла отдельно.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{-\ln x} = \left| \frac{1}{x} = y \right| = \int\limits_1^{+\infty} \frac{dy}{y^2 \ln y} \leq \int\limits_1^{+\infty} \frac{dy}{y^2}.$$

Последний интеграл сходится, значит, наш интеграл на интервале $(0, 1)$ тоже сходится.

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{\ln x} = \left| x = 1 + y \right| = \int\limits_0^1 \frac{dy}{\ln(1+y)} \sim \int\limits_0^1 \frac{dy}{y}.$$

Интеграл расходится (см. (9.4)). Здесь мы учли, что единственная особенность у интеграла после замены – в нуле, и использовали эквивалентность $y \sim \ln(1+y)$ при $y \to 0$. Таким образом, наш исходный интеграл расходится.

$$I=\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx=\int\limits_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx+\int\limits_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx.$$

Начнем со второго из интегралов. Так как для достаточно большого A при $x>A \quad e^{-x}\le x^{-p-1}$, то

$$\int\limits_1^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx\le\int\limits_1^{A} x^{p-1}e^{-x}dx+\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}.$$

Первое слагаемое – собственный инеграл, второе – сходящийся несобственный. Их сумма – сходящийся интеграл.

При $x\in(0,1)$ $e^{-1}\le e^{-x}\le 1$, поэтому сходимость интеграла $\int\limits_0^1 x^{p-1}e^{-x}dx$ равносильна сходимости интеграла $\int\limits_0^1 x^{p-1}dx$. Согласно (9.4) он сходится только при $1-p<1$. Значит, наш исходный интеграл от нуля до бесконечности сходится при $p>0$.

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx=\int\limits_0^1\frac{x^m}{1+x^n}dx+\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx.$$

На бесконечности $\frac{x^m}{1+x^n}\sim\frac{1}{x^{n-m}}$, поэтому интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{x^m}{1+x^n}dx$ сходится при $n>m+1$. При $x\to 0$ $\frac{x^m}{1+x^n}\sim x^m$ и интеграл сходится при $m>-1$. Весь интеграл поэтому сходится при выполнении условий $m>-1$, $n>m+1$.

$$I=\int\limits_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx=\int\limits_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx+\int\limits_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^n}dx.$$

В окрестности нуля $\frac{\ln(1+x)}{x^n}\sim x^{1-n}$, поэтому первый из интегралов сходится при $n<2$. Для любого α при достаточно больших x $\ln(1+x)\le x^\alpha$. Значит, при $n>1$ $\ln(1+x)\le x^{\frac{n-1}{2}}$ и $\frac{\ln(1+x)}{x^n}\le\frac{1}{x^{\frac{n+1}{2}}}$. Интеграл от 1 до $+\infty$ сходится, так как $\frac{n+1}{2}>1$. При $n\le 1$ $\frac{\ln(1+x)}{x^n}\ge\frac{1}{x^n}$ и поэтому интеграл расходится согласно (9.4). Исходный интеграл I от нуля до бесконечности сходится при $n \in (1, 2)$.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^n} dx \leq \frac{\pi}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^n} dx.$$

Поэтому интеграл сходится при $n > 1$. Единственная особенность – на бесконечности. При $n \leq 1$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^n} dx \geq \frac{\pi}{4} \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}.$$

Последний из интегралов расходится, поэтому при соответствующих n расходится исходный интеграл.

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}.$$

У первого из слагаемых особенность в нуле. При $x \to 0$ $\sin^p x \cos^q x \sim x^p$. Поэтому соответствующий интеграл сходится при $p < 1$. Рассмотрим второй интеграл. У него особенность в точке $\pi/2$. Сделаем замену.

$$I = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x} = \left| x = \frac{\pi}{2} - y \right| = \int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^p x \sin^q x}.$$

Значит, интеграл сходится при $q < 1$. Весь интеграл I сходится при $p, q < 1$.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{x^2+1}} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}\sqrt{1+x^{-2}}} \sim \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}.$$

Оба слагаемых сходятся.

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx = \left| 1/x = y \right| = \int\limits_{+\infty}^1 \frac{-\ln y \frac{-dy}{y^2}}{1-\frac{1}{y^2}} = -\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln y dy}{y^2-1} =$$

$$=\left|y-1=z\right| = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln(1+z)dz}{z^2+2z} = \int\limits_0^{1} \frac{\ln(1+z)dz}{z^2+2z} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+z)dz}{z^2+2z} \sim$$

$$\sim \int\limits_0^{1} \frac{zdz}{2z} + \int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+z)dz}{z^2+2z}.$$

Первый из интегралов сходится. Второй оценим сверху:

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\ln(1+z)dz}{z^2+2z} \leq \int\limits_1^{+\infty} \frac{\sqrt{z}dz}{z^2}.$$

Согласно (9.3) интеграл сходится. Исходный интеграл также сходится.

УПРАЖНЕНИЕ 1. Вычислить интегралы № 2334 - 2347.

УПРАЖНЕНИЕ 2. Исследовать на сходимость интегралы № 2358 - 2375.

10 Признак Абеля - Дирихле

Все сформулированные до сих пор признаки касаются абсолютной сходимости, так как они справедливы для неотрицательных функций, в частности для $|f(x)|$. Если интеграл от a до $b \leq +\infty$ сходится, но не абсолютно, то мы будем называть его *условно сходящимся.*

Сформулируем *признак Абеля - Дирихле* условной сходимости: Пусть функция $f(x)$ имеет ограниченную при $x > a$ первообразную, а функция $g(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$. Тогда интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ сходится.

Исследуем интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

на абсолютную и условную сходимость. Так как при $x \to 0$ $\frac{\sin x}{x} \sim 1$, то единственная особенность интеграла на бесконечности. Интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

сходится по признаку Абеля - Дирихле, так как $1/x$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$, а первообразная функции $\sin x$ – это $-\cos x$, ограниченная функция. Проверим наличие абсолютной сходимости.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx.$$

Первый из интегралов в правой части равенства, очевидно, расходится, второй – сходится по признаку Абеля - Дирихле, так как первообразная функции $\cos 2x$, функция $\frac{1}{2}\sin 2x$, ограничена на всей числовой прямой. Поэтому разность интегралов расходится. Значит, по первому признаку сравнения исходный интеграл не является абсолютно сходящимся.

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin\left(\frac{1}{\sin x}\right) dx = \left| \frac{1}{\sin x} = y, \quad x = \arcsin\frac{1}{y}, \quad dx = \frac{-dy}{y\sqrt{y^2-1}} \right| =$$

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin y dy}{y\sqrt{y^2-1}}.$$

Исследуем последний из интегралов на абсолютную сходимость.

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{|\sin y| dy}{y\sqrt{y^2-1}} \leq \int\limits_1^{2} \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}} + \int\limits_2^{+\infty} \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}}.$$

Во втором интеграле при $y \to +\infty$ $\frac{1}{y\sqrt{y^2-1}} \sim y^{-2}$, поэтому он сходится. В первом интеграле сделаем замену

$$\int\limits_1^{2} \frac{dy}{y\sqrt{y^2-1}} = \left| y - 1 = z \right| = \int\limits_0^{1} \frac{dz}{(z+1)\sqrt{z(z+2)}}.$$

При $z \to 0$ $\frac{1}{(z+1)\sqrt{z(z+2)}} \sim \frac{1}{\sqrt{2z}}$ и согласно (9.4) последний интеграл сходится. Значит, исходный интеграл сходится абсолютно.

$$\int\limits_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x) dx = \int\limits_0^2 x^2 \cos(e^x) dx + \int\limits_2^{+\infty} \frac{x^2}{e^x} e^x \cos(e^x) dx.$$

Первый интеграл абсолютно сходится, так как

$$\int\limits_0^2 x^2 |\cos(e^x)| dx \le \int\limits_0^2 x^2 dx = \frac{4}{3}.$$

Во втором интеграле функция $x^2 e^{-x}$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$. А первообразная функции $e^x \cos(e^x)$ есть функция $\sin(e^x)$. Она ограничена по модулю единицей. По признаку Абеля - Дирихле второй интеграл сходится. Проверим его на абсолютную сходимость:

$$\int\limits_2^{+\infty} x^2 |\cos(e^x)| dx \ge \int\limits_2^{+\infty} x^2 \cos^2(e^x) dx == \frac{1}{2} \int\limits_2^{+\infty} x^2 dx - \frac{1}{2} \int\limits_2^{+\infty} x^2 \cos(2e^x) dx.$$

Первый из интегралов расходится, а второй сходится опять же по признаку Абеля - Дирихле. Значит их разность расходится, поэтому исходный интеграл $\int\limits_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x) dx$ не является абсолютно сходящимся.

УПРАЖНЕНИЕ. Исследовать на абсолютную и условную сходимость интегралы № 2379 - 2383.

11 Главное значение в смысле Коши

Пусть при любом $\varepsilon > 0$ существуют собственные интегралы

$$\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x) dx, \quad \int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x) dx, \quad c \in (a, b).$$

Тогда *интегралом в смысле главного значения по Коши* называется число

$$\text{v.p.}\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right).$$

Аналогично при условии, что функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[-a, a]$, $a > 0$, определим

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to+\infty}\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx.$$

$$\text{v.p.}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2-3x+2} = \text{v.p.}\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)(x-2)} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_0^{1-\varepsilon}\frac{dx}{(x-1)(x-2)} + \int\limits_{1+\varepsilon}^{3/2}\frac{dx}{(x-1)(x-2)}\right) +$$

$$+ \lim_{\delta\to 0+}\left(\int\limits_{3/2}^{2-\delta}\frac{dx}{(x-1)(x-2)} + \int\limits_{2+\delta}^{+\infty}\frac{dx}{(x-1)(x-2)}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Bigg|_0^{1-\varepsilon} + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Bigg|_{1+\varepsilon}^{3/2}\right) +$$

$$+ \lim_{\delta\to 0+}\left(\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Bigg|_{3/2}^{2-\delta} + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|\Bigg|_{2+\delta}^{+\infty}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\ln\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} - \ln 2 - \ln\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right) +$$

$$+ \lim_{\delta\to 0+}\left(\ln\frac{\delta}{1-\delta} - \ln\frac{\delta}{1+\delta} + \lim_{a\to+\infty}\ln\frac{a-2}{a-1}\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\ln\frac{1+\varepsilon}{2(1-\varepsilon)} + \lim_{\delta\to 0+}\ln\frac{1+\delta}{1-\delta} = -\ln 2.$$

$$\text{v.p.}\int\limits_{1/2}^{2}\frac{dx}{x\ln x}=\text{v.p.}\int\limits_{1/2}^{2}\frac{d\ln x}{\ln x}=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\ln|\ln x|\Big|_{1/2}^{1-\varepsilon}+\ln|\ln x|\Big|_{1+\varepsilon}^{2}\right)=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0+}(\ln|\ln(1-\varepsilon)|-\ln\ln 2+\ln\ln 2-\ln\ln(1+\varepsilon))=$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\ln\frac{(-\ln(1-\varepsilon))}{\ln(1+\varepsilon)}=0.$$

$$\text{v.p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1+x}{1+x^2}dx=\lim_{a\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right)\Big|_{-a}^{a}=$$

$$=2\lim_{a\to+\infty}\operatorname{arctg}a=\pi.$$

УПРАЖНЕНИЕ. Решить задания № 2390, 2393, 2394.

Список литературы

1. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - Санкт-Петербург: МИФРИЛ, 1995.

2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: Наука, 1977.

3. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. - М.: МГУ, 1988.

4. Зорич В.А. Математический анализ. Т.1. - М.: Наука, 1981.

5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. - М.: Высш. шк., 1988.

6. Свиридюк Г.А., Суханова М.В. Практикум по нахождению интегралов (замена переменных, интегрирование по частям): Метод. указания. - Челябинск, 1990.

7. Свиридюк Г.А., Суханова М.В. Практикум по нахождению интегралов (рациональные функции): Метод. указания. - Челябинск, 1990.

8. Свиридюк Г.А., Федоров В.Е. Математический анализ. Часть I.: Учеб. пособие. - Челябинск, 1999.

8. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. - М.: Наука, 1988.

Интегрирование функций одной переменной

Методические укаазания

Составитель Федоров Владимир Евгеньевич

Редактор Н.П.Мирдак

Подписано в печать 19.04.2000.
Формат 60x84 1/16. Бумага типографская № 2.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 1,6.
Тираж 200 экз. Заказ 55. Бесплатно

Челябинский государственный университет
454021 Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129.

Полиграфический участок Издательского центра ЧелГУ.
454021 Челябинск, ул. Молодогвардейцев, 57-б.